安定多様体定理

ゐぶ

概要

安定多様体定理とは非線形系が安定多様体と不安定多様体をもち, それぞれが線形化された系の安定部分空間と不安定部分空間に双曲型平衡点で接するというものであり, 常微分方程式における定性的な理論の重要な結果の 1 つである. 本稿では例をあげて安定多様体定理を説明した後に証明を与え, 安定多様体定理を用いて安定多様体と不安定多様体を構成する.

1 例

安定多様体定理とは, $\mathbf{x_0}$ を非線形系

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

の双曲型平衡点とするとき, (1) が安定多様体 S と不安定多様体 U をもち, それぞれが線形化された系

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})\mathbf{x} \tag{2}$$

の安定部分空間 E^s と不安定部分空間 E^u に $\mathbf{x_0}$ で接するというものである.
ここで, S と E^s, U と E^u の次元は等しく, (1) の流れを ϕ_t とすると,

$$\forall t \geq 0,\ \phi_t(S) \subset S,$$
$$\forall t \leq 0,\ \phi_t(U) \subset U$$

が成立する. また,

$$\forall \mathbf{c} \in S,\ \lim_{t\to\infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{x_0},$$
$$\forall \mathbf{c} \in U,\ \lim_{t\to-\infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{x_0}$$

が成立する. これが S が安定多様体, U が不安定多様体という理由である.
アフィン変換 $\mathbf{x} \to \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$ により双曲型平衡点 $\mathbf{x_0}$ は原点に移るため, 今回は双曲型平衡点を原点として示す.

まず簡単な例として, 非線形系

$$\dot{x_1} = x_1$$
$$\dot{x_2} = -x_2 - x_1^2$$

を考える. この系は原点が唯一の平衡点であり,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

と表すと線形化された行列は,

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であるため, 安定部分空間 E^s は x_2 軸であり, 不安定部分空間 E^u は x_1 軸である.
また, 初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ を与えると, この系の解は,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^t \\ x_2(t) &= \left(\frac{c_1^2}{3} + c_2\right) e^{-t} - \frac{c_1^2}{3} e^{2t} \end{aligned}$$

である.
ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{0} &\Longleftrightarrow c_1 = 0 \\ \lim_{t\to-\infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{0} &\Longleftrightarrow \frac{c_1^2}{3} + c_2 = 0 \end{aligned}$$

であるため, 安定多様体 S と不安定多様体 U は,

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3 \mid c_1 = 0\} \\ U &= \{\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3 \mid c_2 = -\frac{c_1^2}{3}\} \end{aligned}$$

である.
　次に高次元系の例として, 非線形系

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 \\ \dot{x_2} &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x_3} &= x_3 + x_1^2 \end{aligned}$$

を考える. この系は原点が唯一の平衡点であり,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

と表すと線形化された行列は,

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるため, 安定部分空間 E^s は x_1x_2 平面であり, 不安定部分空間 E^u は x_3 軸である.
また, 初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ を与えると, この系の解は,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= (c_1 + c_2) e^{-t} - c_1 e^{-2t} \\ x_3(t) &= \left(\frac{c_1^2}{3} + c_3\right) e^t - \frac{c_1^2}{3} e^{-2t} \end{aligned}$$

である.
ここで,

$$\lim_{t\to\infty}\phi_t(\mathbf{c})=\mathbf{0}\Longleftrightarrow c_3+\frac{c_1^2}{3}=0$$
$$\lim_{t\to-\infty}\phi_t(\mathbf{c})=\mathbf{0}\Longleftrightarrow c_1=c_2=0$$

であるため, 安定多様体 S と不安定多様体 U は,

$$S=\{\mathbf{c}\in\mathbf{R}^3\mid c_3=-\frac{c_1^2}{3}\}$$
$$U=\{\mathbf{c}\in\mathbf{R}^3\mid c_1=c_2=0\}$$

である.

2 主定理

では, 安定多様体定理の正確な主張を述べる.

Theorem 2.1 (安定多様体定理)

E を原点を含む $\mathbf{R}^n$ の開部分集合, $\mathbf{f}$ を E 上 C^1 級関数とし, ϕ_t を (1) の流れとする. このとき, $\mathbf{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ かつ $D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ が k 個の実部が負である固有値と $n-k$ 個の実部が正である固有値を持つとすると, k 次元微分可能多様体 S で,

$$\forall t\geq 0,\ \phi_t(S)\subset S$$
$$\forall\mathbf{x_0}\in S,\ \lim_{t\to\infty}\phi_t(\mathbf{x_0})=\mathbf{0}$$

を満たすものと $n-k$ 次元多様体 U で,

$$\forall t\leq 0,\ \phi_t(U)\subset U$$
$$\forall\mathbf{x_0}\in U,\ \lim_{t\to-\infty}\phi_t(\mathbf{x_0})=\mathbf{0}$$

を満たすものが存在し, S は (2) の安定部分空間 E^s と $\mathbf{0}$ で接し, U は (2) の不安定部分空間 E^u と $\mathbf{0}$ で接する.

証明の前に証明の流れを述べる.

$$A=D\mathbf{f}(\mathbf{0}),\ \mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{x},\ \mathbf{F}\in C^1(E),\ \mathbf{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\ D\mathbf{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$$

とし (1) は,

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+\mathbf{F}(\mathbf{x})\tag{3}$$

となり,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ s.t.\ |\mathbf{x}|\leq\delta\wedge|\mathbf{y}|\leq\delta\Rightarrow|\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{y})|\leq\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\tag{4}$$

が成立する. さらに, ジョルダン標準形により, $n \times n$ 正則行列 C と実部が負である固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ をもつ $k \times k$ 行列 P と実部が正である固有値 $\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_n$ をもつ $(n-k) \times (n-k)$ 行列 Q を用いて,

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

とできる. また,

$$\mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x},\ \widetilde{E} = C^{-1}(E),\ \mathbf{G}(\mathbf{y}) = C^{-1}\mathbf{F}(C\mathbf{y}) \in C^1(\widetilde{E})$$

とし (3) は,

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \tag{5}$$

となる. また, $\mathbf{G}$ はリプシッツ条件 (4) を満たす.
次に, 積分方程式で解が (4) の解になるものを考え, 逐次近似を用いることで, $j = 1, \ldots, n$ に対し, $n-k$ 階微分可能関数 $\psi_j(y_1, \ldots, y_k)$ で $j = k+1, \ldots, n$ に対し,

$$y_j = \psi_j(y_1, \ldots, y_k)$$

を満たすものが定義できる. これは, $\mathbf{y}$-空間の k 次元可微分多様体 $\widetilde{S}$ を定義する. よって, 線形変換 $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ により, $\mathbf{x}$-空間の k 次元可微分多様体 S を得る. これが求めたい安定多様体である. 同様に不安定多様体も得られる.

さて, 安定多様体定理を証明する.

Proof

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{tP} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tQ} \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\dot{U} = BU,\ \dot{V} = BV,\ e^{tB} = U(t) + V(t)$$

が成立する.
$j = 1, \ldots, k$ に対し, λ_j の実部は負であるため, 十分小さな $\alpha > 0$ で,

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$$

を満たすものが存在する. また, 十分大きな $K > 0$ と十分小さな $\sigma > 0$ で,

$$\forall t \geq 0,\ ||U(t)|| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t}, \tag{6}$$
$$\forall t \leq 0,\ ||V(t)|| \leq Ke^{\sigma t} \tag{7}$$

を満たすものが存在する.

次に積分方程式

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{a}) = U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)\mathbf{G}(\mathbf{u}(s, \mathbf{a}))ds - \int_t^\infty V(t-s)\mathbf{G}(\mathbf{u}(s, \mathbf{a}))ds \tag{8}$$

を考える. (8) の解は (5) の解でもある.

$$\mathbf{u}^{(0)}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}^{(j+1)}(t,\mathbf{a}) = U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)\mathbf{G}(\mathbf{u}^j(s,\mathbf{a}))ds - \int_t^\infty V(t-s)\mathbf{G}(\mathbf{u}^j(s,\mathbf{a}))ds \tag{9}$$

とし, この積分方程式を逐次近似を用いて解く.
まず, $\varepsilon K < \frac{1}{4}$, つまり,

$$\varepsilon < \frac{\sigma}{4K} \tag{10}$$

を仮定し, 帰納法により, $t \geq 0$ に対し,

$$|\mathbf{u}^j(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^{j-1}(t,\mathbf{a})| \leq \frac{K|\mathbf{a}|e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \tag{11}$$

を示す.
$\mathbf{G}$ がリプシッツ条件 (4) を考えると, 条件 (10) は, $K|\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2}$, つまり,

$$|\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$$

となる. $j = 1$ の時は明らかに成立する.
$j = m$ の時成立すると仮定すると, $\mathbf{G}$ がリプシッツ連続であることと (6), (7) より,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}^{m+1}(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^m(t,\mathbf{a})| &\leq \int_0^t ||U(t-s)||\varepsilon|\mathbf{u}^m(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^{m-1}(t,\mathbf{a})|ds + \int_t^\infty ||V(t-s)||\varepsilon|\mathbf{u}^m(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^{m-1}(t,\mathbf{a})|ds \\
&\leq \varepsilon \int_0^t Ke^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \frac{K|\mathbf{a}|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds + \varepsilon \int_0^\infty Ke^{\sigma(t-s)} \frac{K|\mathbf{a}|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds \\
&\leq \frac{\varepsilon K^2|\mathbf{a}|e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{m-1}} + \frac{\varepsilon K^2|\mathbf{a}|e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{m-1}} \\
&\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \frac{K|\mathbf{a}|e^{-\alpha}t}{2^{m-1}} \\
&= \frac{K|\mathbf{a}|e^{-\alpha t}}{2^m}
\end{aligned}$$

が成立する. したがって, 帰納法により, $t \geq 0$ に対し,

$$|\mathbf{u}^j(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^{j-1}(t,\mathbf{a})| \leq \frac{K|\mathbf{a}|e^{-\alpha t}}{2^{j-1}}$$

が成立する.
これにより, $n > m > N,\ t \geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}^n(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^m(t,\mathbf{a})| &\leq \sum_{j=N}^\infty |\mathbf{u}^{j+1}(t,\mathbf{a}) - \mathbf{u}^j(t,\mathbf{a})| \\
&\leq K|\mathbf{a}| \sum_{j=N}^\infty \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{K|\mathbf{a}|}{2^{N-1}}
\end{aligned}$$

が成立するため, $\{\mathbf{u}^{(j)}(t,\mathbf{a})\}_j$ は連続関数のコーシー列である.
完備性より, 任意の $t \geq 0,\ |\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ に対し,

$$\lim_{j\to\infty} \mathbf{u}^{(j)}(t,\mathbf{a}) = \mathbf{u}(t,\mathbf{a})$$

と一様収束する. よって, $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$ は積分方程式 (8), つまり, 微分方程式 (5) の解である.
$\mathbf{G} \in C^1(\widetilde{E})$ より, $t \geq 0,\ |\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ に対し, $\mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})$ は $\mathbf{a}$ に関して微分可能であり, $\mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})$ は $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$ に一様収束するため, $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$ は $\mathbf{a}$ に関して微分可能である.
また, (11) より, $t \geq 0,\ |\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ に対し,

$$|\mathbf{u}(t, \mathbf{a})| \leq 2K|\mathbf{a}|e^{-\alpha t} \tag{12}$$

が成立する.
ここで, $\mathbf{a}$ の $k+1$ 成分から n 成分までを 0 とすると, $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$ の成分 $u_j(t, \mathbf{a})$ は, $j = 1, \ldots, k$ に対し,

$$u_j(0, \mathbf{a}) = a_j \tag{13}$$

が成立し, $j = k+1, \ldots, n$ に対し,

$$u_j(0, \mathbf{a}) = -\left(\int_0^\infty V(-s)\mathbf{G}(\mathbf{u}(s, \mathbf{a}))ds\right)_j \tag{14}$$

が成立する.
$j = 1, \ldots, n$ に対し, 関数を

$$\psi_j(a_1, \ldots, a_k) = u_j(0, \mathbf{a})$$

と定める. つまり, $j = 1, \ldots, k$ に対し, (13) で定義され, $j = k+1, \ldots, n$ に対し, (14) で定義される.
(14) は $a_1, \ldots, a_k$ のみに依るため, $j = k+1, \ldots, n$ に対し, 初期値 $y_j = u_j(0, \mathbf{a})$ は,

$$y_j = \psi_j(y_1, \ldots, y_k)$$

を満たす.
これらの等式は $\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_k^2} < \frac{\delta}{2K}$ に対し, 可微分多様体 $\widetilde{S}$ を定義する. さらに, $\mathbf{y}(t)$ が $\mathbf{y}(0) \in \widetilde{S}$, つまり, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}(0, \mathbf{a})$ を満たす微分方程式 (5) の解とすると, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{a})$ であり, (12) より,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{y}(t) = 0$$

であり, $\mathbf{y}(0) \notin \widetilde{S}$ ならば,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{y}(t) \neq 0$$

である.
流れの合成を考えると, $\mathbf{y}(0) \in \widetilde{S}$ ならば任意の $t \geq 0$ に対し, $\mathbf{y}(t) \in \widetilde{S}$ である.
また, $i = 1, \ldots, k$ と $j = k+1, \ldots, n$ に対し,

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(\mathbf{0}) = 0$$

が成立するため, $\widetilde{S}$ は線形系

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$$

の安定部分空間

$$E^s = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

と原点で接する.
不安定多様体 $\widetilde{U}$ も $\widetilde{S}$ と同様の方法で (5) の系の t を $-t$ に, $(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ を $(y_{k+1}, \ldots, y_n, y_1, \ldots, y_k)$ 置き換えたもの, つまり,

$$\dot{\mathbf{y}} = -B\mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{y})$$

を考えることにより得られる.
最後に線形変換 $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ を考えることで安定多様体 S と不安定多様体 U が得られる. □

$r \geq 1$ とし, $\mathbf{f} \in C^r(E)$ ならば S と U は C^r 級多様体であり, $\mathbf{f} \in C^\omega(E)$ ならば S と U は C^ω 級多様体である.

3　主定理を用いた安定多様体と不安定多様体の構成

非線形系

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x_2} &= x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

の安定多様体と不安定多様体を安定多様体定理の証明の方法で構成する. この系は原点が唯一の平衡点であり,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

と表すと線形化された行列は,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるため, 安定部分空間 E^s は x_1 軸であり, 不安定部分空間 E^u は x_2 軸である.

$$A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix},\ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし, 積分方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \mathbf{a}) &= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)\mathbf{F}(\mathbf{u}(s, \mathbf{a}))ds - \int_t^\infty V(t-s)\mathbf{F}(\mathbf{u}(s, \mathbf{a}))ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-(t-s)}u_2^2(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t-s}u_1^2(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

を逐次近似を用いて解くと,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(0)}(t,\mathbf{a}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{u}^{(1)}(t,\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}^{(2)}(t,\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2s}a_1^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 \\ -\frac{e^{-2t}}{3}a_1^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}^{(3)}(t,\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{e^{-4s}}{9}a_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{e^{-4s}}{9}a_1^4 \\ e^{-2s}a_1^2 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 - \frac{1}{27}e^{-t}(1-e^{-3t})a_1^4 \\ -\frac{1}{3}e^{-2t}a_1^2 \end{pmatrix} \\
&\cdots \\
\mathbf{u}^{(k)}(t,\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} e^{-t}a_1 - \frac{1}{27}e^{-t}(1-e^{-3t})a_1^4 \\ -\frac{1}{3}e^{-2t}a_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t}O(a_1^5) \\ e^{-2t}O(a_1^5) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるため,

$$\forall k \geq 4,\ \mathbf{u}^{(k)}(t,\mathbf{a}) = \mathbf{u}^{(3)}(t,\mathbf{a}) + O(a_1^5)$$

が成立する. よって, 安定多様体は,

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2 + O(x_1^5) \qquad (x_1 \to 0)$$

により定義され, t を $-t$ に置き換え, x_1 と x_2 を入れ替えて同様に計算すると, 不安定多様体は,

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2^2 + O(x_2^5) \qquad (x_2 \to 0)$$

により定義される.

参考文献

[1] Lawrence Perko(著)・「Differential Equations and Dynamical Systems」・Springer・2000

[1] Earl A. Coddington (著),Norman Levinson (著)・「Theory of Ordinary Differential Equations」・McGraw-Hill Education・1984